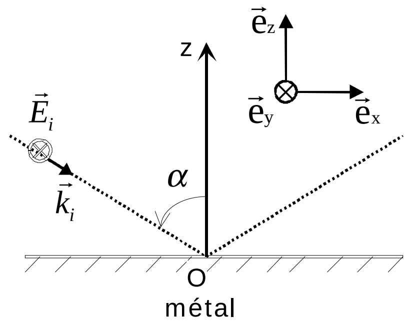
-EXERCICE 29.5-

• ENONCE :

« Réflexion oblique d'une O.P.P.M sur un plan conducteur »

On s'intéresse à la réflexion d'une O.P.P.M sur un plan métallique dont la conductivité $\gamma \to \infty$:



Le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence, c'est-à-dire le plan contenant le vecteur d'onde incident et la normale au plan métallique.

Le champ incident sera noté : $\boxed{\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})\vec{e}_y}$

1) Déterminer le champ magnétique incident.

2) En admettant que l'onde réfléchie a également une structure d'onde plane, donner les expressions des champs électrique et magnétique réfléchis.

3) En déduire la densité de courant superficiel $\vec{j}_S$.

4) On admet que la force de Laplace exercée par un champ magnétique $\vec{B}$ sur un élément de surface $d\vec{S}$ parcouru par un courant superficiel $\vec{j}_S$ a pour expression : $d\vec{F}_{Lap} = \dfrac{1}{2}(\vec{j}_S \wedge \vec{B})dS$.

Calculer la force par unité de surface s'exerçant sur le métal (= « pression de radiation » magnétique) ; exprimer la valeur moyenne de son module, notée p_M , en fonction de ε_0, E_0 et α .

• CORRIGE :

« Réflexion oblique d'une O.P.P.M sur un plan conducteur »

1) Nous allons utiliser la relation de structure des O.P.P.M dans le vide, soit :

$\vec{B}_i = \dfrac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \vec{E}_i$; on a aussi : $\boxed{\vec{k}_i = k(\sin\alpha\vec{e}_x - \cos\alpha\vec{e}_z)}$ (où k est le module du vecteur d'onde)

En effectuant le produit vectoriel, on trouve :

$$\boxed{\vec{B}_i = \frac{E_0}{c}[\cos\alpha\cos(\omega t - \vec{k}_i\cdot\vec{r})\vec{e}_x + \sin\alpha\cos(\omega t - \vec{k}_i\cdot\vec{r})\vec{e}_z]}$$

2) • En admettant que l'onde réfléchie est une onde plane, on écrit: $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r}\cos(\omega_r t - \vec{k}_r\cdot\vec{r})$

Le champ électrique dans le métal étant considéré comme nul ($\gamma \to \infty$), la relation de passage en z=0 devient : $\vec{E}_i + \vec{E}_r - \vec{0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$. (1)

Cette relation devant être vérifiée en z=0, $\forall x,\ y,\ t$ et les fonctions sinusoïdales formant une **famille libre**, les phases doivent être égales $\forall x,\ y,\ t$ en z=0 ; il vient donc :

$\omega t - \vec{k}_i\cdot\vec{r} = \omega_r t - \vec{k}_r\cdot\vec{r}$, $\forall x, y \text{ et } t \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega}$ et : $\boxed{\vec{k}_r\cdot\vec{r} = \vec{k}_r\cdot\vec{r} \quad \forall x \text{ et } y, \text{ en } z=0}$

En développant le produit scalaire, on arrive à :

$k\sin\alpha\times x = k_{rx}\times x + k_{ry}\times y$, $\forall x \text{ et } y \Rightarrow \boxed{k_{ry}=0}$ et : $\boxed{k_{rx} = k\sin\alpha}$

Rq : le vecteur d'onde réfléchi appartient au plan d'incidence (cf. 1ère loi de Descartes).

L'onde réfléchie se propageant dans le vide, on a la relation de dispersion : $\|\vec{k}_r\| = \omega / c = k \Rightarrow$

$\boxed{k_{rz} = +\sqrt{k^2 - k_{rx}^2} = k\cos\alpha}$ (on a choisi la solution positive car l'onde réfléchie fuit le métal)

En résumé : $\boxed{\vec{k}_r = k(\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_z)}$

($\vec{k}_r$ est symétrique de $\vec{k}_i$ par rapport à l'axe Ox, ce qui est conforme à la 2ème loi de Descartes)

• La relation (1) montre que $\vec{E}_r$ n'a pas de composante selon $\vec{e}_x$; $\vec{E}_r$ doit aussi être perpendiculaire à $\vec{k}_r \Rightarrow E_y\times 0 + E_z\times k\cos\alpha = 0 \Rightarrow$ pour $\alpha \neq \pi/2$, $\boxed{E_z = 0}$.

La relation (1) s'écrit alors en z=0 : $\boxed{\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{0}}$ (la densité surfacique de charge est donc nulle)

On a alors : $\boxed{\vec{E}_r = -E_0\cos[\omega t - k(x\sin\alpha + z\cos\alpha)]\vec{e}_y}$

La relation de structure des O.P.P.M donne enfin :

$$\boxed{\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r}{\omega}\wedge\vec{E}_r = \frac{E_0}{c}\cos[\omega t - k(x\sin\alpha + z\cos\alpha)](\cos\alpha\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_z)}$$

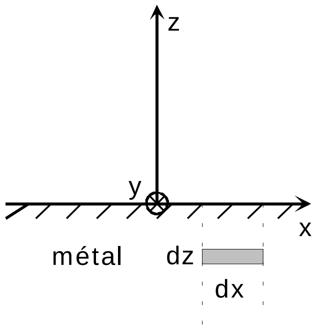
3) La relation de passage sur le champ magnétique s'écrit ici :
$\vec{B}_i+\vec{B}_r-\vec{0}=\mu_0\vec{j}_S\wedge\vec{e}_z=\mu_0(j_{Sx}\vec{e}_x+j_{Sy}\vec{e}_y)\wedge\vec{e}_z=\mu_0(j_{Sy}\vec{e}_x-j_{Sx}\vec{e}_y)$, ceci en z=0 ; après l'introduction des expressions de $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_r$ prises en z=0, il vient : $\boxed{\vec{j}_S=\frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos\alpha\cos(\omega t-kx\sin\alpha)\vec{e}_y}$

4) $\frac{d\vec{F}_{Lap}}{dS}=\frac{1}{2}\vec{j}_S\wedge\vec{B}(0)=\frac{1}{2}j_S\vec{e}_y\wedge(\mu_0 j_S\vec{e}_y\wedge\vec{e}_z)=-\frac{\mu_0}{2}j_S^2\vec{e}_z=-\frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2}\cos^2\alpha\cos^2(\omega t-kx\sin\alpha)\vec{e}_z\Rightarrow$

$p_M=\left\langle\left\|\frac{d\vec{F}_{Lap}}{dS}\right\|\right\rangle_T=\frac{E_0^2}{\mu_0 c^2}\cos^2\alpha$ ou : $\boxed{p_M=\varepsilon_0 E_0^2\cos^2\alpha}$ (dirigée VERS le métal)

Rq1 : si $\vec{E}_i$ appartient au plan d'incidence, le résultat est plus compliqué car $\sigma\neq 0$ (le champ électrique ayant maintenant une composante normale) ; il faut alors tenir compte de la « pression de radiation électrique » : $p_E=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$ (dirigée vers l'extérieur du métal).

Rq2 : justifions la relation donnant la pression de radiation, en particulier l'origine du facteur ½ :



Dans le métal, le champ magnétique ne s'annule pas immédiatement; posons:

$\vec{B}_{\text{int}}=B(x,z,t)\vec{e}_x$

$\vec{j}=j(x,z,t)\vec{e}_y$

Calculons la force de Laplace qui s'exerce sur un volume élémentaire $d\tau=dxdydz$; on a :

$d^3\vec{F}_{Lap}=j\vec{e}_y\wedge B\vec{e}_x dxdydz=-j(x,z,t)B(x,z,t)dxdydz\vec{e}_z$

On peut alors calculer la force de Laplace surfacique en intégrant selon z (de -∞ à 0, selon la variable croissante), ce qui donne :

$\frac{d^2\vec{F}_{Lap}}{dxdy}=\int_{-\infty}^{0}-j_yB_x dz\vec{e}_z$; par ailleurs : $\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ (on néglige le courant de déplacement dans le métal) ⇒ après calcul : $\frac{\partial B_x}{\partial z}=\mu_0 j_y\Rightarrow\frac{d^2\vec{F}_{Lap}}{dS}=-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\mu_0}B_x\times\frac{\partial B_x}{\partial z}dz\vec{e}_z=-\frac{B_x^2(0)}{2\mu_0}\vec{e}_z=-\frac{B_x(0)}{2\mu_0}\times B_x(0)\vec{e}_z$

En tenant compte de : $\vec{B}(0)=\mu_0 j_S\vec{e}_y\wedge\vec{e}_z=\mu_0 j_S\vec{e}_x$, on arrive effectivement à :

$$\boxed{\frac{d^2\vec{F}_{Lap}}{dS}=\frac{1}{2}\vec{j}_S\wedge\vec{B}(0)}$$

Rq : l'origine du facteur ½ est l'intégration et est donc liée au fait que le champ magnétique ne s'annule pas instantanément dans le métal, mais progressivement sur l'épaisseur de peau.